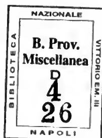
TRUDI

MEMORIA


FONDO PROVINCIA

NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
D
4
26
VITTORIO EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine 45

STUDII INTORNO

AD UNA SINGOLARE ELIMINAZIONE

CON APPLICAZIONE ALLA RICERCA DELLA RELAZIONE TRA GLI ELEMENTI DI DUE CONICHE, L'UNA ISCRITTA, L'ALTRA CIRCOSCRITTA AD UN POLIGONO; ED AI CORRISPONDENTI TEOREMI DEL PONCELET.

MEMORIA

PER

NICOLA TRUDI



Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Fascicolo 6.° — Ottobre 1862.

Stamperia del Fibreno 1862

NOTIZIE STORICHE

La comparsa nel mondo scientifico di un' opera recente da parte del fondatore della geometria intuitiva, dopo un silenzio malaugurato di oltre a trent'anni in questa scienza per lui condotta a tanta altezza, è stata, com'esser dovea, un vero avvenimento per coloro, cui divenne familiare il libro immortale del *Trattato delle proprietà projettive delle figure*. Nell'opera novella l'illustre autore si è proposto di esporre gli studii analitici che lo guidarono alle antiche scoverte; ed a parte la dottrina e le interessanti vedute scientifiche, che vi traluceno ad ogni passo, ogni spirito imparziale approverà e soscriverà di buon grado ai motivi che ne hanno determinata la pubblicazione. Ed è strano in vero di vedere, e spesso in opere accreditate, che si attribuiscono ad altri geometri le proposizioni fondamentali nel metodo delle projezioni, come se non esistesse il nome del Poncelet; e sovente ancora riprodotti come nuovi, o contorti con nuovi nomi i più belli teoremi di questo geometra. In quanto a noi aggiungiamo che nella maggior parte delle riflessioni critiche, le quali formano il soggetto di note dottissime all'opera, di cui parliamo, e specialmente in fatto di metodi, noi ritroviamo le nostre proprie convinzioni.

Tra queste note intanto ha per noi un particolare interesse quella sotto il n° III, che ha per titolo « Nota istorica critica e filosofica a proposito de'teoremi sulla iscrizione e circoscrizione simultanea de'poligoni « alle coniche ecc: » ed il nostro interesse muove da che si tratta di quistioni che già da gran tempo formarono un soggetto prediletto di nostri studii. In detta nota l'autore traccia la storia di queste quistioni e ricorda i primi passi di Fuss e di Steiner; indi il memorabile lavoro di Jacobi pel sistema di due cerchi, pubblicato fin dal 1828 nel 3° volume del giornale di Matematiche di Crelle; accenna all'estensione de' teoremi a due piccoli cerchi della sfera, fatta poco appresso da Richelot, discepolo illustre di Jacobi; e discorre in fine de' lavori recentissimi di Cayley, di Mention, e di Brioschi; di modo che secondo questi ragguagli, le quistioni di cui si tratta sarebbero rimaste obbliate dal 1828 al 1856.

Noi non possiamo esser dolenti che il geometra Francese ignorasse la piccola parte da noi presa in tali ricerche, ed i nostri modesti risultamenti. L' isolamento al quale ci condannavano le nostre politiche condizioni renderebbero già ragione di questo fatto; ma v'ha di più, chè noi stessi, poco fidenti nelle nostre forze, provammo sempre ritegno ad inviare i nostri umili lavori ad uomini illustri. Egli è vero che una nostra memoria approvata per gli Atti dell'Accademia nel 1853, ma pubblicata per le stampe molto più tardi, contiene per incidente la maggior parte de'risultamenti ai quali eravamo pervenuti in riguardo alle quistioni di cui si tratta, e questa memoria avrebbe potuto essere a cognizione del Poncelet; ma come la sua intitolazione non accennava alle dette quistioni, ed invece alla *Rappresentazione geometrica immediata dell' equazione fondamentale nella teorica delle funzioni ellittiche*, è da ritenere che per questa ragione sia sfuggita all'illustre Poncelet nel raccogliere gli elementi storici da lui pubblicati; come per la ragione medesima ha dovuto sfuggire all'illustre geometra Russo Mention, il quale nel 1859 dà come nuove pel caso di due cerchi le equazioni più generali da noi date per due coniche molto tempo innanzi, e poi riprodotte nella citata memoria del 1853; ma a questo proposito avviene la curiosa circostanza che nel numero istesso del Bullettino dell'Accademia di Pietroburgo, nel quale trovasi inserito il lavoro del Mention, si trova pure accennato tra i libri pervenuti in dono a quell'Accademia il volume de' nostri Atti, in cui la suddetta memoria è pubblicata.

Completando adunque le notizie date dal Poncelet, noi rammenteremo che i primi nostri lavori intorno ai suoi famosi teoremi rimontano al 1841. In una memoria pubblicata a quell'epoca per le stampe si trovano queste quistioni ridotte ad equazioni più generali di quelle incontrate assai più tardi dal Mention, e da quel punto era in gran parte minorata la difficoltà che le circonda. Ivi sono date per la prima volta dimostrazioni analitiche compiute pe'teoremi risguardanti i poligoni variabili iscritti nelle coniche con lati passanti per punti dati ; ed in quanto ai poligoni iscritti in una conica con lati tangenti ad un'altra conica vi son date le dimostrazioni pel triangolo e pel quadrilatero ; mentre la difficoltà di una eliminazione ci fu allora di ostacolo a poterli conchiudere in generale. Ma in quella memoria fu pure da noi dato, per la prima volta, un metodo generale per trovare le relazioni che debbono sussistere tra gli elementi di due sezioni coniche l'una iscritta e l'altra circoscritta ad un poligono , ed applicato specialmente al triangolo ed al quadrilatero. Eppure ecco come scrive il chiarissimo Salmon nel 1858. « Per far vedere « l'uso che può farsi di questo principio, noi cercheremo la condizione « (dovuta a Cayley, e d'altronde assai difficile a trovarsi) affinchè un « triangolo sia iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra ». E questa relazione è precisamente quella da noi data nel 1841.

Ma più tardi nel 1843, dopo aver sormontati gli ostacoli della eliminazione, che aveano limitati i nostri primi lavori, ci fu permesso di dimostrare i teoremi del Poncelet nella maniera più generale e diretta, senza ricorrere ad alcuna trasformazione di figura, e quindi di dare un metodo generale assai più esplicito, per trovare la relazione corrispondente ad un poligono di qualsivoglia numero di lati, iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra; e tutto ciò risulta da un articolo inserito nel Rendiconto dell'Accademia pel 1843.

Ricorderemo ancora che negli Atti del Congresso degli Scienziati, tenuto in Napoli poco dopo di quell'epoca, fu da noi letto un articolo intorno a quella singolare eliminazione, essendo il primo ed il solo esempio che per noi si fosse conosciuto di una difficilissima eliminazione compiuta col soccorso della differenziazione, e della integrazione.

Non dobbiamo tacere d'altra parte che essendosi nel 1845 recato in Napoli l'illustre Jacobi, non solo non isdegnò di mostrarci il suo compiacimento pei detti lavori, ma aggiunse alle nostre formole alcuni sviluppi di suo proprio carattere , che noi conserviamo come preziosi og-

getti. E furono ancora i suoi incoraggiamenti quelli che ci spinsero più tardi ad applicare i nostri risultamenti all'addizione e moltiplicazione delle funzioni ellittiche di 1ª specie, ch'è il soggetto della nostra memoria del 1853.

Risulta da questi fatti che noi possiamo pretendere alla piccola gloria di aver dato i primi una dimostrazione analitica compiuta e diretta dei teoremi del Poncelet, e di aver dato anche i primi un metodo per la ricerca della relazione, affinchè un poligono di qualsivoglia numero di lati possa essere iscritto e circoscritto a due coniche. Lungi da noi il pensiero di scendere al paragone de'nostri risultamenti con quelli recentemente ottenuti da' grandi geometri testè ricordati e verso de' quali noi professiamo la più sincera venerazione; però sembra che questi risultamenti non abbiano soddisfatto il geometra Francese, il quale inclina quasi a giudicare insufficienti le dimostrazioni analitiche dei teoremi, e sembra ancora di ritenere che la quistione delle relazioni pei poligoni iscritti e circoscritti, anche limitata al caso di due cerchi, non abbia ancora una soluzione pratica e generale. In fatti, se n è il numero dei lati del poligono, le sole formole di Jacobi darebbero le relazioni espresse in funzione di n, dei raggi, e della distanza dei centri dei due cerchi; mentre gli altri metodi obbligano a cercare questa relazione pei singoli valori di n. Ma siccome le formole di Jacobi fanno dipendere queste relazioni da integrali ellittici, si può dire che la quistione è virtualmente, ma non praticamente risoluta; e sotto questo aspetto a noi sembra che il geometra Francese abbia perfettamente ragione. Intanto noi avevamo già veduto che le nostre formole potevano benissimo condurci a risolvere la quistione sotto questo nuovo aspetto; ed i risultamenti da noi ottenuti formano il soggetto della presente memoria, nella quale abbiamo dovuto riprodurre con più sviluppo le ricerche intorno alla singolare eliminazione di cui si è discorso, poichè da essa dipendono immediatamente ed i teoremi del Poncelet, e le relazioni più volte mentovate. E forse non saranno lette senza interesse alcune osservazioni intorno all'integrale della famosa equazione che conduce alle funzioni ellittiche. Tuttavolta è giusto di osservare che quasi tutte le proprietà notabilissime delle equazioni, alle quali noi riduciamo le attuali quistioni, potrebbero inversamente dedursi da' teoremi geometrici del Poncelet; e certo si vedrà con piacere che questi teoremi possono anche immediatamente condurre alla integrazione di quella equazione differenziale ricordata poc'anzi, e che fu il soggetto di profonde ricerche per parte di Eulero e di Lagrange.

Ci sia lecito in fine di aggiungere che noi non troviamo fondate le obiezioni del Poncelet intorno alla dimostrazione del principale de' suoi teoremi data dal Brioschi (*); il quale, *affatto non assume*, ma dimostra che l'inviluppo del lato libero di un poligono iscritto in una conica coi rimanenti lati tangenti di un' altra, sia una sezione conica passante pei quattro punti (reali o immaginarii) comuni alle due prime. Ma di questo argomento intendiamo di occuparcene espressamente in altra occasione, e mostreremo che il metodo dell'illustre geometra Italiano è forse il meglio adatto ad esprimere le relazioni, di cui si è discorso, in funzione degli elementi delle due coniche e del numero de' lati del poligono.

SUNTO DELLA MEMORIA

Le quistioni geometriche che formano lo scopo della memoria del Trudi sono ridotte dall' autore ad essere la traduzione immediata delle proprietà di un singolare sistema di equazioni. Supposta una serie di $n+1$ variabili $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, ed il sistema di n equazioni

$$av_0^2v_1^2+2b(v_0+v_1)v_0v_1+c(v_0+v_1)^2+2dv_0v_1+2e(v_0+v_1)+f=0\ ,$$

$$av_1^2v_2^2+2b(v_1+v_2)v_1v_2+c(v_1+v_2)^2+2dv_1v_2+2e(v_1+v_2)+f=0\ ,$$

$$av_2^2v_3^2+2b(v_2+v_3)v_2v_3+\quad \text{etc:} \quad \text{etc:} \quad \text{etc:}=0\ ,$$

. . . .

$$av_{n-1}^2v_n^2+2b(v_{n-1}+v_n)v_{n-1}v_n+\quad \text{etc:} \quad \text{etc:} \quad \text{etc:}=0\ ,$$

dove a, b, c, d, e, f sono costanti qualunque, l'autore in un *primo* articolo studia le proprietà di questo sistema; ed ecco i principali risultamenti delle sue ricerche.

I. Se si eliminano dal dato sistema tutte le variabili intermedie, la relazione tra le variabili estreme v_0 e v_n è un'equazione dello stesso grado e della stessa forma di ciascuna di quelle da cui trae origine. Così questa eliminata è un'equazione della forma

$$A_nv_0^2v_n^2+2B_n(v_0+v_n)v_0v_n+C_n(v_0+v_n)^2+2D_nv_0v_n+2E_n(v_0+v_n)+F_n=0\ ;$$

dove i coefficienti sono funzioni determinate delle costanti che figurano

(*) Vedi gli Annali di matematiche del Tortolini, vol. VIII, e del Terquem, vol. XVI.

nelle date equazioni, e di un'altra costante μ, che cangia di valore a misura che cangia il numero delle equazioni, e che in ogni caso si determina con procedimento uniforme. Bisogna tener presente che nella precedente equazione l'indice n è destinato a ricordare che essa esprime l'eliminata corrispondente ad un sistema di n equazioni. Per esempio, se si elimina dalle due prime equazioni la variabile comune v_1, in virtù della convenzione stabilita l'eliminata sarà rappresentata con

$$A_2 v_0^2 v_2^2 + 2B_2 (v_0 + v_2) v_0 v_2 + C_2 (v_0 + v_2)^2 + 2D_2 v_0 v_2 + 2E_2 (v_0 + v_2) + F_2 = 0\ ;$$

ma, determinando i coefficienti nel modo già detto, si ha

$$(1)\quad \begin{cases} A_2 = (ac - b^2)(4be - (c + d)^2) - (bd - ae)^2 \\ B_2 = \frac{1}{2}(bd - ae)(af + c^2 - 2be) - (ac - b^2)(de - bf) \\ C_2 = (ac - b^2)(cf - e^2) - \frac{1}{4}(af + c^2 - 2be)^2 \\ D_2 = (bd - ae)(de - bf) - \frac{1}{2}(4be - (c + d)^2)(af + c^2 - 2be) \\ E_2 = \frac{1}{2}(de - bf)(af + c^2 - 2be) - (bd - ae)(cf - e^2) \\ F_2 = (cf - e^2)(4be - (c + d)^2) - (de - bf)^2\ . \end{cases}$$

Merita intanto di essere osservato che, essendo già noti i coefficienti della eliminata per due equazioni, debbono tenersi come conosciuti anche quelli della eliminata per un numero di equazioni, che sia una potenza di 2. Perchè, se si tratta di quattro equazioni, è chiaro che i corrispondenti coefficienti A_4, B_4, etc: si comporranno con le A_2, B_2, etc: nella stessa maniera con cui queste ultime lo sono con le a, b, etc; similmente quelli dell'eliminata per otto equazioni, cioè A_8, B_8, etc. si formeranno nello stesso modo con le A_4, B_4, etc; e così di seguito.

II. Ove accada che sia nullo il conveniente valore della costante μ, la eliminata sarà semplicemente

$$(2)\quad a v_0^2 v_n^2 + 2b(v_0 + v_n) v_0 v_n + c(v_0 + v_n)^2 + 2d v_0 v_n + 2e(v_0 + v_n) + f = 0\ ;$$

vale a dire i suoi coefficienti riescono uguali a quelli de' rispettivi termini omologhi di ciascuna delle date equazioni.

Segue da questa proprietà che il sistema delle equazioni date è, in generale, incompatibile con l'equazione (2); ma perchè quelle possano coesistere con questa è necessario, e basta che sia soddisfatta la relazione $\mu = 0$.

III. Se il valore della costante μ sia tale da soddisfare alla relazione

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} cf-e^2 & de-bf & be-cd+\mu \\ de-bf & af-d^2-2\mu & bd-ae \\ be-cd+\mu & bd-ae & ac-b^2 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

l'eliminata è un quadrato perfetto.

IV. Ammettendo che le date equazioni possano coesistere con l'equazione (2), se il numero totale di quelle e di questa sia pari, l'eliminata corrispondente o alla prima, o alla seconda metà del sistema di equazioni sarà quadrato perfetto.

In un *secondo* articolo l'autore prende ed esaminare il sistema particolare di n equazioni

$$av_0^2 v_1^2 + c(v_0+v_1)^2 + 2dv_0 v_1 + f = 0 \ ,$$
$$av_1^2 v_2^2 + c(v_1+v_2)^2 + 2dv_1 v_2 + f = 0 \ ,$$
$$av_2^2 v_3^2 + c(v_2+v_3)^2 + 2dv_2 v_3 + f = 0 \ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$av_{n-1}^2 v_n^2 + c(v_{n-1}+v_n)^2 + 2dv_{n-1} v_n + f = 0 \ :$$

sistema il quale risulta dal precedente, supponendo $b=0$ ed $e=0$, ma che merita speciale considerazione, sia per importanti applicazioni, e sia perchè il sistema generale potrebbe sempre trasformarsi in questo sistema più semplice. Egli dimostra che nel caso attuale l'eliminata si può ridurre alla forma

$$av_0^2 v_n^2 + c_n(v_0+v_n)^2 + 2d_n v_0 v_n + f = 0 \ ,$$

dove i coefficienti de' termini estremi a ed f sono gli stessi di quelli dei corrispondenti termini omologhi di ciascuna delle date equazioni; e gli altri due c_n e d_n sono legati dalla relazione

$$(4) \qquad c(af-d_n^2-2c_n d_n) = c_n(af-d^2-2cd) \ ;$$

di modo che tutto si riduce in ultima analisi alla determinazione di un solo di quei due coefficienti. L'autore si applica in primo luogo alla ri-

cerca del valore di c_n; e cominciando dall'esaminare il caso di $n=2$, trova

$$c_2=\frac{(c^2-af)^2}{4c(c+d)^2}. \tag{5}$$

Passando al caso più difficile di $n=3$, guidato da una osservazione molto semplice, perviene a riconoscere che c_3 è pure una funzione razionale delle costanti delle date equazioni, definita dalla formola

$$c_3=\frac{(cc_2-af)^2}{c(c_2-c)^2},$$

la quale in virtù del valore già trovato di c_2 diviene

$$c_3=c\left(\frac{(c^2-af)^2-4af(c+d)^2}{(c^2-af)^2-4c^2(c+d)^2}\right)^2. \tag{6}$$

Ma quindi, diretto da' medesimi principî, può conchiudere che il coefficiente c_n è sempre esprimibile razionalmente per mezzo delle costanti delle date equazioni, e dimostra che il suo valore è dato dalla formola

$$c_n=\frac{(cc_{n-1}-af)^2}{c_{n-2}(c_{n-1}-c)^2},$$

la quale fa dipendere il valore di c_n da quelli di c_{n-1} o c_{n-2}; e però, essendo già conosciuti quelli di c_2 o c_3, ne segue che questa formola risolve compiutamente la quistione rispetto al coefficiente c_n.

In riguardo al coefficiente d_n il suo valore può sempre dedursi dalla relazione (4) per mezzo di quello di c_n; ma quì l'autore distingue due casi, secondochè l'indice n, che esprime il numero delle date equazioni, è impari o pari. Nel primo caso dichiara di non sapersi ancora pronunciare sulla impossibilità di ottenere per d_n una espressione razionale, che non dia luogo ad equivoco di segno, come parrebbe doversi conchiudere dalla (4). Nel caso poi di n pari ed eguale a $2r$, egli mette in veduta quest'altra relazione.

$$2c_r d_{2r}+c_r^2+af=0,$$

la quale, indipendentemente dalla (4), determina razionalmente il valore di d_{2r} in funzione di quello di c_r.

Nel *terzo* articolo sono esposte alcune formole di geometria analitica, le quali possono rapportarsi alla teorica degl' inviluppi. Indicando con x_r ed y_r le coordinate di un punto V_r di una conica V data dall'equazione

$$V = y^2 + lx^2 + mx = 0 \ ,$$

l'autore chiama *elemento del punto* V_r il rapporto $y_r : x_r$, che esprime col simbolo v_r, e dimostra che una corda qualunque $V_r V_s$ della conica V ha per equaziono

$$(v_r + v_s)y + (l - v_r v_s)x + m = 0 \ .$$

Immaginando poi cho la corda $V_r V_s$ debba toccare un'altra conica U data dall'equazione

$$U = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0 \ ,$$

la condizione del contatto tra le duo linee sarà espressa da una relazione della forma

$$a v_r^2 v_s^2 + 2b(v_r + v_s)v_r v_s + c(v_r + v_s)^2 + 2d v_r v_s + 2e(v_r + v_s) + f = 0 \ ,$$

dove si ha

$$(7) \qquad \begin{cases} a = \gamma\varphi - \varepsilon^2 \ , & d = -l(\gamma\varphi - \varepsilon^2) - m(\beta\varepsilon - \gamma\delta) \\ b = \beta\varphi - \delta\varepsilon \ , & e = l(\delta\varepsilon - \beta\varphi) + m(\beta\delta - \alpha\varepsilon) \\ c = \alpha\varphi - \delta^2 \ , & f = l^2(\gamma\varphi - \varepsilon^2) + 2lm(\beta\varepsilon - \gamma\delta) + m^2(\alpha\gamma - \beta^2) \ . \end{cases}$$

Quando nell'equazione di U si ha $\beta = 0$ ed $\varepsilon = 0$, la condizione di contatto si riduce ad

$$a v_r^2 v_s^2 + c(v_r + v_s)^2 + 2d v_r v_s + f = 0 \ .$$

Se le coniche V ed U sono cerchi entrambi, e sia preso per asse delle ascisse la congiungente de'centri, chiamando r il raggio del cerchio U, p la distanza del suo centro all'origine, e q la distanza dello stesso centro al punto di V, diametralmente opposto all'origine, si avrà

$$(8) \qquad a = p^2 - r^2 \ , \quad c = -r^2 \ , \quad d = r^2 + pq \ , \quad f = q^2 - r^2 \ ;$$

e sarà inoltre $p + q = R$, dinotando R il raggio del cerchio V; salvo a

tener presente che, mentre il segmento p, ch'è l'ascissa del centro di U, può sempre essere riguardato come essenzialmente positivo, il segmento q poi dovrà tenersi come positivo o come negativo, secondochè il centro di U cade al di dentro, o al di fuori del cerchio V.

Reciprocamente, supposto che tra le variabili v_r, v_s sia data una relazione della forma

$$av_r^2 v_s^2 + 2b(v_r + v_s)v_r v_s + c(v_r + v_s)^2 + 2dv_r v_s + 2e(v_r + v_s) + f = 0 ,$$

ogni corda della conica V, la quale congiunga due punti della curva, i di cui elementi soddisfino alla data relazione, sarà tangente ad una determinata sezione conica, che sarà perciò l'inviluppo di tutte quelle corde. E se la data relazione abbia la forma particolare

$$av_r^2 v_s^2 + c(v_r + v_s)^2 + 2dv_r v_s + f = 0 ,$$

l'equazione dell'inviluppo mancherà de' termini in xy ed y; e supponendo che la conica V sia un cerchio, e quindi $l = 1$, l'inviluppo sarà cerchio anch'esso quando sia

$$af - d^2 = c(a + 2d + f) .$$

In un *quarto* articolo sono sviluppati i teoremi del Poncelet relativi ai poligoni iscritti, e circoscritti a due coniche; ma dopo il significato geometrico delle equazioni considerate nell' art. 1. diviene evidente che i detti teoremi sono la traduzione immediata delle diverse proprietà di queste equazioni allora esposta. Così la I^a proprietà equivale a dire che:

Se sieno date due coniche, e nella prima sia iscritto a piacere un poligono di n+1 *lati, con* n *lati tangenti dell'altra, l'inviluppo del lato libero sarà anch'esso una sezione conica passante pe' quattro punti comuni alle prime* (reali o immaginari).

La II^a proprietà dimostra che:

Se un poligono qualunque si trovi iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra, tra queste due coniche potranno con le medesime condizioni essere situati innumerevoli altri poligoni dello stesso numero di lati.

E la IV^a proprietà conduce a riconoscere che:

Se due coniche consentono tra loro poligoni i cui lati siano in numero pari, le loro diagonali (cioè le congiungenti di due vertici opposti) s'intersegano tutte in un medesimo punto.

Ed in fine l'autore conchiude il teorema più generale, che:

Se sia dato un sistema di coniche aventi le stesse secanti comuni (reali o ideali), *e in una di esse sia iscritto a piacere un poligono, del quale ogni lato, ad eccezione di un solo, tocchi una delle altre, l'inviluppo del lato libero sarà pure una conica, avente con le prime le stesse secanti comuni.*

In un *quinto* ed ultimo articolo l'autore si occupa della relazione tra gli elementi di due coniche V ed U, l'una circoscritta, l'altra iscritta in un poligono di n lati, distinguendo i due casi di n pari, ed n impari.

1° *Caso*, $n=2r$. In questa ipotesi la relazione è quella in virtù di cui riducesi a quadrato perfetto l'eliminata corrispondente alle r equazioni

$$\psi(v_0, v_1)=0 \ , \ \psi(v_1, v_2)=0 \ , \ \dots \ , \ \psi(v_{r-1}, v_r)=0 \ ;$$

$\psi(v_r, v_s)$ indicando il primo membro dell'equazione scritta poco innanzi; e però, dinotando μ il valore conveniente della costante, la relazione, che si cerca, si ha in generale nella formola (3). Ma pe' singoli valori di r la relazione, di cui trattasi, può ottenersi sotto forma assai più semplice, indipendentemente dalla costante μ; ed è così, per esempio, che si ha:

Per $r=2$, *cioè pel quadrilatero*

$$2e(ae-2bc)+(c+d)(c^2-af)+2fb^2=0 \ .$$

Per $r=3$, *cioè per l'esagono*

$$C_2^2+2C_2D_2-4B_2E_2+A_2F_2=0 \ ,$$

dove i valori di A_2, B_2, etc: sono dati dalle (1).

Per $r=4$, *cioè per l'ottagono*

$$2E_3(A_3E_3-2B_3C_3)+(C_3+D_3)(C_3^2-A_3F_3)+2F_3B_3^2=0 \ .$$

etc: etc: etc:

2° *Caso*, $n=2r+1$. Per questo caso la relazione si può esprimere in generale con la formola

$$aC_r^2-4bB_rC_r+4cB_r^2+2dA_rC_r-4eA_rB_r+fA_r^2=0 \ ,$$

che dà quella pel triangolo, pel pentagono, per l' ettagono, etc: secon-

**

dochè pongasi $r=1, 2, 3$, etc.: Siccome per $r=1$ le A_r, B_r, etc: si mutano in a, b, etc, in questa ipotesi la formola sarà divisibile per a, e quindi la relazione pel triangolo diviene

$$c^2+2cd-4be+af=0\ .$$

Ma volendo esprimerla in funzione de' parametri delle equazioni delle due coniche V ed U, basterà sostituire alle a, b, etc: i valori (7); e si ottiene in tal guisa

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha\varphi-\delta^2)^2-2(\alpha\varphi-\delta^2)\left[l(\gamma\varphi-\varepsilon^2)+m)\beta\varepsilon-\gamma\delta)\right]\\ -4(\beta\varphi-\delta\varepsilon)\left[l(\delta\varepsilon-\beta\varphi)+m(\beta\delta-\alpha\varepsilon)\right]\\ +(\gamma\varphi-\varepsilon^2)\left[l^2(\gamma\varphi-\varepsilon^2)+2lm(\beta\varepsilon-\gamma\delta)+m^2(\alpha\gamma-\beta^2)\right]\end{array}\right\}=0\ ;$$

formola già data dall' autore fin dal 1841.

Passa in seguito l' autore ad occuparsi della stessa quistione pel caso di due cerchi, che dipende dal sistema di equazioni più semplici considerate nell' articolo *secondo*; ed ecco i principali risultamenti delle sue ricerche, per le quali sono ancora distinti i due casi di n pari, ed n dispari.

1° *Caso*; $n=2r$. In questa ipotesi si ha la relazione

$$cc_{r-1}=af\ ; \tag{9}$$

ma se r è una potenza di 2, e si supponga $r=2^x$, si avrà la relazione molto più semplice

$$c^2_{2^{x-1}}=af\ . \tag{10}$$

Considerando per esempio il *quadrilatero*, nel qual caso si ha $r=2$, $c_{r-1}=c_1=c$, si ottiene dalla (9)

$$c^2=af\ .$$

Volendo esprimere questa relazione per mezzo degli elementi de' due cerchi p, q, r, basterà sostituire ad a, c, f i valori (8); e si ha così

$$r^2(p^2+q^2)=p^2q^2\ .$$

Per *l'esagono*, essendo $r=3$, si ha dalla (9)

$$cc_2=af\ ;$$

ma quindi, pel valore di c_2 dato dalla (5), risulta

$$(c^2-af)^2=4af(c+d)^2\;;$$

ed in fine in virtù delle (8) verrà

$$[r^2(p^2+q^2)-p^2q^2]^2=4p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)\;.$$

Per l'*ottagono*. essendo $r=4$, si avrebbo dalla (9)

$$cc_3=af\;;$$

e quindi, pel valore di c_3 dato dalla (6), si otterrebbe

$$c^2[(c^2-af)^2-4af(c+d)^2]^2=af[(c^2-af)^2-4c^2(c+d)^2]^2\;;$$

ma sviluppando, riducendo, e sopprimendo il fattore c^2-af, che non può risolvere la quistione, perchè spettante al caso del quadrilatero, risulta in fine per l'ottagono la seguente relazione

$$(c^2-af)^4=16afc^2(c+d)^4\;. \tag{11}$$

Ma nel caso attuale, essendo $r=4=2^2$, possiamo ancora far capo dalla formola (10), da cui essendo $\alpha=2$, si ottiene

$$c_2^2=af\;;$$

ed in virtù della (5) si avrà

$$\frac{(c^2-af)^4}{16c^2(c+d)^4}=af\;.$$

Egli è chiaro che questa formola non è diversa dalla (11); ma importa di osservare che il secondo metodo fa ritrovarla immediatamente, senza incontrare alcun fattore estraneo. Sostituendo nella (11) i valori (8), la relazione per l'ottagono diviene

$$[r^2(p^2+q^2)-p^2q^2]^4=16r^4p^4q^4(p^2-r^2)(q^2-r^2)\;,$$

identica a quella ottenuta da Jacobi, rendendo razionale la relazione già data da Fufs. (V. Crelle, vol. 3° pag. 380).

2° *Caso*, $n=2r+1$. Per questo caso si ha la relazione generale

$$c_r^2+2c_r d+af=0 \ ,$$

la quale in virtù de' valori (8) può ridursi ad una delle due forme

$$c_r+r^2+pq=r(p+q) \ ,$$
$$c_r+r^2+pq= \quad 2Rr \quad ,$$

a patto che al secondo membro si dia il $+$ o il $-$, secondochè il segmento q è positivo, o negativo; vale a dire secondochè il centro del cerchio U è interno o esterno al cerchio V; e dove inoltre si ha

$$p+q=2R \ ,$$

dinotando R il raggio del cerchio U.

Supposto, per esempio, che si tratti del *triangolo*, e quindi $c_r=c_1=c=-r^2$, si ha immediatamente la relazione

$$pq-2Rr=0 \ ;$$

e certamente non esiste alcun altro metodo, che possa darla così prontamente.

Pel pentagono si ha dapprima

$$c_2+r^2-(2Rr-pq)=0$$

ma quindi per la (5) e per la (8), cambiando i segni, e liberando da fratti otterremo

$$(12) \qquad [r^2(p^2+q^2)-p^2q^2]^2-4r^4p^2q^2+4r^2p^2q^2(2Rr-pq)=0 \ .$$

Per giudicare del grado di semplicità, con cui si perviene a questa relazione pel pentagono, basta esaminare il procedimento, che bisogna tenere per dedurla dalle formole di Jacobi, come può vedersi nell' opera di Durège (Theorie der Elliptischen Functionen) a pag. 166, dove trovasi sviluppato lo stesso caso con quelli del triangolo e del quadrilate-

ro. Secondo i simboli da noi adoperati la relazione , come si legge nel libro di Durège, sarebbe

$$(13) \qquad pr\sqrt{2R}=pr\sqrt{q-r}+q(p+r)\sqrt{p-r} \;;$$

e facendone sparire i radicali dovrebbe coincidere con la (12); ma d'altra parte si vede che ciò non può verificarsi, perchè mentre la (12) e la (13) resa razionale, sono entrambe omogenee, il grado di omogeneità della prima è 8, e 10 quello della seconda. Tuttavolta sopprimendo da questa il fattore $(p+r)^2$, le due relazioni si vedranno coincidere perfettamente. Ma bisogna osservare che, anche dopo la soppressione di un tal fattore, evvene un altro di secondo grado, che nella (12) si può mettere subito in veduta. In fatti , se alla quantità chiusa tra le parentesi del primo termine, si aggiunga e si tolga $2r^2pq$, quel primo termine si muta in

$$((4R^2r^2p^2q^2)-2r^2pq)^2 \,.$$

Laonde, sviluppandolo come quadrato di un binomio, la (12) si riduce a

$$(4R^2r^2-p^2q^2)^2-4r^2pq(4R^2r^2-p^2q^2)+4r^2p^2q^2(2Rr-pq)=0 \;,$$

e questa formola è evidentemente divisibile per $2Rr-pq$, fattore che non può risolvere la quistione , poichè spettante al caso del triangolo.

Con la stessa facilità si troverebbe per l'ettagono la seguente relazione

$$\begin{gathered} r^2[(r^2(p^2+q^2)-p^2q^2)^2-4p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)]^2 \\ =(p-r)(q-r)[(r^2(p^2+q^2)-p^2q^2)^2-4r^4p^2q^2]^2 \;; \end{gathered}$$

omogenea di 18° grado; la quale ha tuttavia per fattore il primo membro della precedente relazione pel pentagono ; sicchè la vera relazione per l'ettagono è una formola omogenea di 12° grado rispetto a p , q , r, come in fatti è data dall'Autore. Se si renda ragionale la relazione per questo caso data da Fuss (V. Crelle vol. 3, pag. 379), si troverebbe una relazione omogenea di 24° grado; il che prova ch'essa è affetta da un fattore estraneo di 4° grado, come dal Trudi fu già osservato nella sua memoria del 1843, citata nelle Notizie Storiche intorno alle presenti quistioni. Anche di 24° grado risulta la relazione per l'ettagono data da Mention, quando si esprime per mezzo degli elementi p, q, r.

———








BIBLIOTECA